超幾何微分方程式の群について (解析的常微分方程式の大域的研究)

AUTHOR(S):

大久保, 謙二郎

数理解析研究所講究録
175巻 1973年 9-22

超幾何微分方程式の群について

大久保謙二郎

§1 記号と仮定

n 連立線型一階常微分方程式系

$$(t-B)\frac{dX}{dt} = Ax$$

を考える。A, B は共に $n\times n$ 定数行列, x は n ベクトル。B は (n,n) 要素以外は全部零, (n,n) 要素は1。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & & 0 & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & & 0 & a_{2n} \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & a_{n-1,n-1} & & a_{n-1\,n} \\ a_{n1}, & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{array}{l} a_{j,n}=1, \quad a_{kk}=a_k \\ \text{と略記する。} \end{array}\right)$

仮定. 1° $a_j \not\equiv 0 \pmod{1}$

2° $a_j - a_k \not\equiv 0 \pmod{1}$ $j\neq k$

3° a_j : real,

4° $\det(\rho_j - A) = 0$ $\rho_1, \cdots, \rho_n$: real

$\rho_j - \rho_k \neq 0$

5° $\rho_j - a_k \neq 0$

§2. 主要定理

定理1。 $\sum \rho_j = \sum a_k$ （Fuchs の関係式）

定理2。

$$x_k(t) = t^{a_k}\sum_{m=0}^{\infty} g_k(m)\, t^m, \quad g_k(0) = (\overbrace{0,\cdots,0,1}^{k},0\cdots,0)$$

$$(k=1,2,\cdots,n-1)$$

$$x_n(t) = (t-1)^{a_n}\sum_{m=0}^{\infty} g_n(m)\,(t-1)^m \qquad g_n(0) = (0,0,\cdots,0,1)$$

は一次独立な解で，D を $\{|t|<1\}\cap\{|t-1|<1\}$ のコンパクトな連結部分集合とするとき

$$\det(x^1,\cdots,x^n)(t) = \frac{\prod_k \Gamma(a_{kk}+1)}{\prod_j \Gamma(\rho_j+1)}\, t^{\sum^{j-1} a_j}\,(t-1)^{a_n} \qquad (t\in D)$$

定理3、 $X(t) = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を基本解とするとき，X に関する $t=0$ における circuit matrix M_0，$t=1$ におけるそれを M_1 とすると，$c_1', c_2', \cdots, c_{n-1}'$，$c_1'', \cdots, c_{n-1}''$ を適当な定数として

$$M_0 = \begin{pmatrix} e_1, & 0, & \cdots & 0 & c_1'(e_1-1) \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 & c_2'(e_2-1) \\ & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & & e_{n-1} & c_{n-1}'(e_{n-1}-1) \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ c_1''(e_n-1) & c_2''(e_n-1) & \cdots & \cdots & e_n \end{pmatrix}$$

となる。

定理4. $X(x)$ に適当な対角形定数行列をかけ基本解とすると

$$c_j' = 1$$

$$c_j'' = \gamma_j = -\frac{\prod_k \sin\pi(\rho_k - \rho_j)}{\sin\pi a_n \cdot \sin\pi a_j \cdot \prod_{k\neq j,n} \sin\pi(a_k - a_j)}$$

とすれば M_0, M_1 が MONODROMY 群の生成元である。

系. $\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j = 1 - \prod_k \left(\frac{\sin\pi\rho_k}{\sin\pi a_k} \right)$

注意, a_k, ρ_j を real とすれば $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$ も又 real である。

定理5. エルミート行列 T を

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & \alpha_2 & \cdot & \cdot & -1 \\ & & \ddots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{n-1} & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\alpha_k = \frac{1+\sum \gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right)$$

とすると $T = M_j T M_j^*$ $(j = 0, 1)$。かゝる T は定数倍を除いて一意に定まる。

定理6. MONODROMY 群が有限である条件

(1) $n \leqq 2$, (2) $\alpha_k + 1 - n \geqq 0$

§3. 定理2の証明.

新らしいパラメーター μ を導入して (1) のかわりに

$$(2) \qquad (t-B)\frac{dx}{dt} = (A+\mu)x$$

特異性 $t^{a_{kk}+\mu}$ を持つ解 $x^k(t,\mu)$ を

$$x_k(t,\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} g_k(m,\mu)\, t^{a_k+\mu+m}$$

によって定義する。但し, $g_k(0,\mu) = g_k(0)$ とおく。(2) の解で指数 $a_{kk}+\mu$ に対応する解は只一つしかない。

$$(t-B)\frac{dx_k(t,\mu)}{dt} = (A+\mu)x_k(t,\mu)$$

を微分して

$$(3) \qquad (t-B)\frac{d}{dt}\left[x_k'(t,\mu)\right] = (A+\mu-1)\left[x_k'(t,\mu)\right]$$

を得るから $x_k'(t,\mu) = (a_{kk}+\mu)\,x_k(t,\mu-1)$ である。まとめて基本解系 $X(t,\mu)$ に応用すると

$$(t-B)X'(t,\mu) = (t-B)X(t,\mu-1)\begin{pmatrix} a_{11}+\mu & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}+\mu \end{pmatrix}$$

$$= (A+\mu)X(t,\mu)$$

$w(t,\mu)$ を $\qquad w(t,\mu) = \det X(t,\mu)$ とすれば

$$w(t,\mu-1)\,t^{n-1}(t-1)\cdot\prod_k(a_k+\mu) = \prod_j(\rho_j+\mu)\cdot w(t,\mu)$$

(4) $$w(t,\mu) = t^{n-1}(t-1)\cdot\prod_j\frac{\Gamma(\rho_j+\mu)}{\Gamma(\rho_j+\mu+1)}\prod_k\frac{\Gamma(a_k+\mu+1)}{\Gamma(a_k+\mu)}\,w(t,\mu-1)$$

$$= t^{\mu(n-1)}(t-1)^{\mu}\cdot\prod_j\frac{\Gamma(\rho_j+1)}{\Gamma(\rho_j+\mu+1)}\cdot\prod_k\frac{\Gamma(a_k+\mu+1)}{\Gamma(a_k+1)}\,w(t,0)$$

一方 $x^k(t,\mu)$ の係数 $g^k(m,\mu)$ を詳しく調べると

$$(a_k+\mu+m)\,g^k(m,\mu) - B(a_k+\mu+m+1)\,g^k(m+1,\mu) = (A+\mu)\,g^k(m,\mu)$$

という差分方程式の初期条件

$$g_k(0,\mu) = g_k(0)$$

を満足する解であるから

$$g^k(m,\mu) = \frac{\Gamma(a_k+\mu+1)}{\Gamma(a_k+\mu+m+1)}\,h^k(m,\mu)$$

とおくと

$$\begin{cases}(a_k+m-A)\,h_k(m) = B\,h_k(m+1)\\ h_k(0) = g_k(0)\end{cases}$$

となって $h_k(m)$ は μ に無関係となる。

$$x^k(t,\mu) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_k+\mu+1)}{\Gamma(a_k+\mu+m+1)}\,h^k(m)\,t^{a_k+\mu}$$

右辺は μ に関する階乗級数で μ が実軸に沿って $\mu\to\infty$ のとき t が compact set D 内にあれば

$$x^{k}(t,\mu) = \frac{\Gamma(a_k+\mu+1)}{\Gamma(a_k+\mu+k)} h^{k}(0)\, t^{a_k+\mu} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\}$$

$x_n(t,\mu)$ についても同様。結局

$$w(t,\mu) = \det X(t,\mu) = t^{\sum^{n-1} a_k + (n-1)\mu} (t-1)^{a_n+\mu} \det\{h^1(0), \dots, h_n(0)\}$$

$$\times \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\}$$

$$= t^{\sum^{n-1} a_k} (t-1)^{a_n} \cdot t^{(n-1)\mu} (t-1)^{\mu} \times \left[1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right]$$

(4) とあわせて

$$w(t,0) = t^{\sum^{n-1} a_k} (t-1)^{a_n} \cdot \left(\prod_k \Gamma(a_k+1) \right) / \left(\prod_j \Gamma(\rho_j+1) \right)$$

$$\times \prod_k \frac{\Gamma(\rho_k+\mu+1)}{\Gamma(a_k+\mu+1)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\}$$

$$= t^{\sum a_k} (t-1)^{a_n} \frac{\prod_k \Gamma(a_k+1)}{\prod_j \Gamma(\rho_j+1)} \left\{ \mu^{\sum \rho_k - \sum a_j} \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) \right\}$$

$\mu \to \infty$ とすれば定理は証明された。

§4 定理 3, 4, 5 の証明.

今 $x^{k}(t)$ $(k=1,2,\dots,n-1)$ が $t=1$ に近付いてとき

$$x_k^{*}(t) - c'_k x_n(t)$$

が一価であるように c'_k を定めることが可能である。このとき

$$\tilde{x}_k(t) = x_k(t) - c''_k x_n(t)$$

とおいてやると $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, x_n)$ は独立な基本解系 $\tilde{X}(t)$ とな

る。同様に解 $\underbrace{x_n(t)-\sum_{j=1}^{n-1}c_j' x_j(t)}$ が $t=0$ の近くで一価になるような定数 $c_1', \cdots, c_{n-1}'$ が一意に定まる。$\tilde{x}_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j$ とおけば

$$\tilde{X}(t) = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \tilde{x}_n)$$

は基本解である。各々変換公式

$$\tilde{X} = X \begin{pmatrix} 1 & & 0 & c_1' \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & c_{n-1}' \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = XC_0$$

$$\tilde{\tilde{X}} = X \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ c_1'' & \cdots & c_{n-1}'' & 1 \end{pmatrix} = XC_1$$

を満足し，$\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}}$ についての各 $0, 1$ における circuit matrix は

$$\tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} e_1 & & & & \\ & e_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & e_{n-1} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & e_n \end{pmatrix}$$

であることを用いれば

$$M_0 = C_0 \tilde{M}_0 C_0^{-1}, \qquad M_1 = C_1 \tilde{M}_1 C_1^{-1}$$

によって X に関する circuit matrix は求められる。実際 $C_k = I + \Sigma_k$ とおけば Σ_k $(k=0,1)$ は巾零であるから

$$M_0 = (I+\Sigma_0)\tilde{M}_0(I-\Sigma_0) = \tilde{M}_0 + \Sigma_0\tilde{M}_0 - \tilde{M}_0\Sigma_0 - \Sigma_0\tilde{M}_0\Sigma_0$$

$$M_1 = (I+\Sigma_1)\tilde{M}_1(I-\Sigma_1) = \tilde{M}_1 + \Sigma_1\tilde{M}_1 - \tilde{M}_1\Sigma_0 - \Sigma_1\tilde{M}_1\Sigma_1$$

より簡単に計算される。これで定理3は示された。

新しい基本解系 $X'(t) = X(t)T$ を対角行列

$$T = \mathrm{diag}(c_1', c_2' \cdots c_{n-1}', 1)$$

によって定義すると

$$M_0 \to T^{-1}M_0T$$

$$M_1 \to T^{-1}M_1T$$

となる。今 $c_j' \cdot c_j'' = \gamma_j$ と書けば定理4にいう形になる。

γ_j を計算するには

$$\det(M_0M_1 - \lambda I) = 0$$

の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が $t=\infty$ における指数 $f_k = \exp(-2\pi i \rho_k)$ の逆であることを用いる。

$$M_0M_1 = \begin{pmatrix} e_1+\gamma_1(e_n-1)(e_1-1) & \gamma_2(e_n-1)(e_2-1) & \cdots & \cdots & e_n(e_1-1) \\ (e_2-1)\gamma_1(e_n-1) & e_2+\gamma_2(e_2-1)(e_n-1) & \cdots & \cdots & e_n(e_2-1) \\ & & \ddots & & \vdots \\ (e_n-1)\gamma_1(e_{n-1}-1) & \cdots & \cdots & e_{n-1}+\gamma_{n-1}(e_n-1)(e_{n-1}-1) & e_n(e_{n-1}-1) \\ \gamma_1(e_n-1) & \gamma_2(e_n-1) & & \gamma_{n-1}(e_n-1) & e_n \end{pmatrix}$$

$\det(M_0M_1-\lambda I)$ を計算するには第 n 列の (e_j-1) 倍を第 j 列より

引いて残りを書くと

$$\begin{vmatrix} e_1-\lambda & 0 & 0 & & +\lambda(e_1-1) \\ 0 & e_2-\lambda & 0 & & \lambda(e_2-1) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \gamma_1(e_n-1) & \gamma_2(e_n-1) & & & e_n-\lambda \end{vmatrix}$$

今これを才ｎ列について展開する。

$$\det(M_0M_1-\lambda I) = (\cancel{-1)^{n-1}\sum(-1)^{j-1}}$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots & j, & \cdots, & n \\ 1, & 2 & \cdots & n & \cdots & j \end{pmatrix} \lambda(e_j-1)\cdot\gamma_j(e_n-1)\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(e_k-\lambda)}{e_j-\lambda} + \prod_k(e_k-\lambda)$$
$$= \prod_k (f_k-\lambda)$$

この式がλに関するidentityであることを用いて $\lambda = e_j$ における residue を計算すると

$$\varphi(\lambda) = \prod_k (e_k-\lambda) \qquad \psi(\lambda) = \prod_j (f_j-\lambda)$$

とおいて、

$$-\gamma_j\cdot e_j(e_j-1)(e_n-1)\varphi'(e_j) = \psi(e_j)(e_n-e_j)$$

又 $\lambda = 1$ とおけば

$$1-\sum\gamma_j = \frac{\psi(1)}{\varphi(1)}$$

より γ_j の式が直接与えられる。定理5, 6の形になることを示すには $\exp(\pi i a_k) = e_k'$, $\exp(\pi i \beta_j) = f_k'$ を用いて書くのが便利である。

まず，
$$\psi(1)/\varphi(1) = \prod_{j=1}^{n}(f_k'^2-1)\Big/\prod(e_k'^2-1)$$
$$= \frac{(f_1\cdots f_n)\cdot\prod(f_k'-f_k'^{-1})}{(e_1\cdots e_n)\prod(e_k'-e_k'^{-1})}$$
$$= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\pi\rho_k}{\sin\pi a_k}\right) \qquad \begin{aligned}(f_1\cdots f_n) &= \exp(\pi i\textstyle\sum\rho_j)\\ = (e_1\cdots e_n) &= \exp(\pi i\textstyle\sum a_k)\end{aligned}$$

次に
$$\gamma_j = -\frac{(f_1'^2-e_j'^2)(f_2'^2-e_j'^2)\cdots\cdots(f_n'^2-e_j'^2)}{e_j'^2\cdot(e_j'^2-1)\underbrace{(e_1'^2-e_j'^2)(e_2'^2-e_j'^2)\cdots(e_{n-1}'^2-e_j'^2)}_{n-2}(e_n'^2-1)}$$
$$= -\frac{\left(f_1'e_j'^{-1}-\frac{1}{f_1'e_j'^{-1}}\right)\cdots\left(f_n'e_j'^{-1}-\frac{1}{f_n'e_j'^{-1}}\right)\cdot f_1\cdots f_n\cdot e_j^{n}}{e_j'^3\left(e_j'-\frac{1}{e_j'}\right)\cdot e_1'\cdots\hat{j}\cdots e_{n-1}'\,e_j'^{n-2}\left(e_1'e_j'^{-1}-\frac{1}{e_1'e_j'^{-1}}\right)\cdots\left(e_{n-1}'e_j'^{-1}-\frac{1}{e_{n-1}'e_j'^{-1}}\right)e_n'\left(e_n'-\frac{1}{e_n'}\right)}$$
$$= -\frac{\sin\pi(\rho_1-a_j)\sin\pi(\rho_2-a_j)\cdots\sin\pi(\rho_n-a_j)}{\sin\pi a_j\,\sin\pi a_n\cdot\sin\pi(a_1-a_j)\cdots\sin\pi(a_{n-1}-a_j)}$$

これにより γ_j, $1-\sum\gamma_j$ が全部実数であることが証明された。

§5 定理5,6 の証明.

まず，$GL(n,C)$ の部分群 $G=\{g\}$ が有限群であるとするとき
$$\sum_{g\in G}\langle ug,ug\rangle = [u,u] = u\,\Gamma\,u^*$$

は正定値な二次形式となり $u\to ug$ なる変換に対して

$$u\Gamma u^* \to ug\Gamma g^* u^* = u\Gamma u^*$$

であるからΓは　$g\Gamma g^* = \Gamma$　となるエルミート行列である。

ゆえにGが有限ならばエルミート行列ΓがあってM_0, M_1によって不変となる。

まず　$M_0 \Gamma M_0^* = \Gamma$　となる条件を求めるには　$\Gamma = (\gamma_{jk})$　$(\bar{\gamma}_{jk} = \gamma_{kj})$

として

$$\Gamma M_0^* = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ & & \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2^* & \cdots & 0 \\ & & & \\ e_1^*-1 & e_2^*-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_{11} e_1^* + \gamma_{1n}(e_1^*-1) & & & \gamma_{1n} \\ \vdots & & & \\ \cdots & \gamma_{jk} e_k^* + \gamma_{jn}(e_k^*-1) & \cdots & \gamma_{jn} \\ & & & \\ \gamma_{n1} e_1^* + \gamma_{nn}(e_1^*-1) & \gamma_{nk} e_k^* + \gamma_{nn}(e_k^*-1) & & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

$M_0 \Gamma M_0^*$　の第n列を計算する。これは上の行列の第n列と同一であるから

$$\begin{cases} \gamma_{nk} e_k^* + \gamma_{nn}(e_k^*-1) = \gamma_{nk} \quad , \quad (k=1,2,\cdots,n-1) \\ \gamma_{nn} = \gamma_{nn} \end{cases}$$

故に　$\gamma_{n,k} = -\gamma_{nn}$　である。

次に $M_0 \Gamma M_0^*$ の第 j 列を計算する。ベクトル

$$(0, 0, \cdots, e_j, \cdots, (e_j - 1))$$

と第 k 行にかけると

$$e_j \left[\gamma_{jk} e_k^* + \gamma_{j,n} (e_k^* - 1) \right] + (e_j - 1) \left[\gamma_{n,k} e_k^* + \gamma_{nn} (e_k^* - 1) \right] = \gamma_{jk}$$

ところが $\gamma_{n,j} = \overline{\gamma}_{j,n} = -\gamma_{nn}$ で右辺が実数だから

$$(e_j e_k^* - 1) \gamma_{jk} - \gamma_{nn} \{ e_j (e_k^* - 1) + (e_j - 1) \} = 0$$

$e_j e_k^* = 1$ ならば $\gamma_{j,j}$ に無関係に成立

$e_j e_k^* \neq 1$ ならば $\gamma_{j,k} = -\gamma_{nn}$

今簡単のために $\gamma_{nn} = 1$, $\gamma_{j,j} = \alpha_j$ とおけば

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & -1 \\ & \cdot & - & - & - \\ -1 & -1 & \cdot & \alpha_{n-1} & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (\alpha_j : 任意)$$

は M_0 に関して不変である。

$M_1 \Gamma$ の第一列より第 $(n-1)$ 列までは

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & 0 \\ * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

の形より Γ の対応する列と同じで第 n 列の (n, k) 要素は

$$-\sum_{j \neq k} \gamma_j (e_n - 1) + \alpha_k \gamma_k (e_n - 1) - e_n \qquad (k \leq n-1)$$

(n, n) 要素は

$$-\sum r_j(e_n-1)+e_n$$

である。

$M_1 P M_1^*$ の第 j 列は $j \leq n-1$ ならば (j, n) 要素を除いて、

$$M_1^* = \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

の形より P の第 j 列と同じである。第 n 列は

$$\left(-\sum_{j \neq 1} r_j(e_n-1)+\alpha_1 r_1(e_n-1)-e_n,\ -\sum_{j \neq 2} r_j(e_n-1)+\alpha_2 r_2(e_n-1)-e_n,\ \cdots\cdots,\ * \right)$$

(n, k) 要素を -1 とおくと

$$-\sum_{j \neq k} r_j(e_n-1)+\alpha_k r_k(e_n-1)-(e_n-1)=0$$

$$-\sum r_j+(\alpha_k+1)r_k-1=0$$

$$\alpha_k = \frac{1+\sum r_j}{r_k}-1 \qquad (k=1, 2, \cdots, n-1)$$

これを利用して $M_1 P$ の $(\overset{n}{j}, n)$ 要素 $-\sum r_j(e_n-1)+e_n$ から $M_1 P M_1^*$ の (j, n) 要素を計算する。 $\alpha_j r_j(e_n^*-1)-\sum_{k \neq j} r_k(e_n^*-1)-e_n^*$

α_k が real であるからこの値は -1 である。最後に (n, n) 要素は

$$(-1, -1, \cdots, -1,\ e_n-\sum r_j(e_n-1))$$

と $(r_1(e_n^*-1), r_2(e_n^*-1), \cdots, r_{n-1}(e_n^*-1), e_n^*)$ に乗じて

$$-\sum r_j(e_n^*-1)+e_n e_n^*-\sum r_j e_n^*(e_n-1)=e_n e_n^*=1$$

Γが正定値であるためには

$$u\Gamma u^* = \sum_1^{n-1} \alpha_k |u_k|^2 + |u_n|^2 - \sum_{j\cdot k} u_j u_k^*$$

$$= \sum_1^{n-1} \{\alpha_k + 1 - n\} u_k^2 + (2-n)|u_n|^2 + \sum_{j\cdot k} |u_j - u_k|^2$$

が正定値である，つまり $n=2$ の場合しかありえない。